



Primer Apellido:
Segundo Apellido:
Nombre:
Matrícula: Clave:

Telejercicio:
Unidad 3 v0.2

Unidad 3

Contribuciones de incertidumbre

1. Recomendaciones del CIPM

Con objeto de uniformizar los resultados de las medidas, el CIPM (Comité Internacional de Pesas y Medidas) redactó una recomendación en 1 981 [1] que posteriormente se matizó en 1 986 [2]. Estas recomendaciones se reproducen en la GUM [3] que es actualmente el documento internacional con mayor respaldo para la estimación de las incertidumbre de los resultados de las medidas. La primera recomendación del CIPM se resume en los siguientes puntos:

1) Dependiendo del método empleado para su determinación numérica, las componentes de la incertidumbre de medida pueden agruparse en dos categorías:

   a) las que se estiman mediante procedimientos estadísticos sobre los valores obtenidos al reiterar medidas de un mensurando, a las que se propuso denominar de tipo A, y

   b) las que se aprecian por otros métodos, a las que se sugirió denominar de tipo B.

2) Ambos tipos de componentes deben cuantificarse mediante varianzas o cantidades equivalentes, debiendo caracterizarse las situaciones de dependencia - en su caso - por las correspondientes covarianzas.

3) La incertidumbre así determinada, puede multiplicarse por un factor superior a la unidad, al objeto de obtener una incertidumbre total mayor, pero a condición de indicar siempre el valor de dicho factor.

Al utilizar varianzas y covarianzas, los valores que resultan de combinar las contribuciones individuales pueden obtenerse mediante leyes estadísticas de propagación bien conocidas.

Desde un punto de vista práctico, la propuesta inicial del CIPM supuso desechar la hipótesis de que todas las contribuciones de incertidumbre respondiesen a leyes normales; trabajar siempre con desviaciones típicas o varianzas; y no identificar la incertidumbre con un intervalo de confianza sino directamente con la desviación típica resultante (u). La multiplicación de esta última por un factor de cobertura (k), habitualmente entre 2 y 3, y que debe especificarse siempre como parte del resultado de medida, permite obtener unos valores de incertidumbre expandida (U) "más seguros" para las decisiones habituales en la mayor parte de las aplicaciones, especialmente en la industria, de forma que:

$$U = ku$$

Sin embargo, subsistía la necesidad de armonizar la incertidumbre expandida de los resultados de las medidas, por lo que la segunda recomendación [2] ya adelantó que esta cuestión estaba siendo considerada por un grupo de trabajo de ISO (Organización Internacional de Normalización) en el que también estaban representadas otras organizaciones.

El trabajo de dicho grupo se publicó formalmente en 1 993 [3] y además de presentar el cálculo de la incertidumbre típica compuesta (u_c) a partir de las recomendaciones del CIPM, indicó cómo caracterizar la incertidumbre expandida mediante un factor (k) resultante de establecer un intervalo de cobertura de la distribución resultante para un cierto nivel de confianza.

Posteriormente se comenzó a trabajar en un primer suplemento de la GUM[3] que estableciera las bases para "propagar" distribuciones en vez de varianzas, mediante técnicas adecuadas como el método de Monte Carlo. Desde el año 2 004 existía un borrador de dicho documento que se ha hecho oficial en otoño del 2 007 publicado por OIML (Organización Internacional de Metrología Legal) [4].

En este curso seguiremos el procedimiento recomendado por la GUM para la estimación de las incertidumbres de medida. En esencia, las contribuciones consideradas determinan una función modelo con n variables de entrada, $X_1, \ldots, X_n$. Para cada una de ellas, X_i, hay que conocer su valor, estimado por x_i, y su desviación típica, $u(x_i)$, y las covarianzas entre variables de entrada, en su caso, además de un parámetro que caracterice la menor o mayor confianza en aquella desviación típica lo que suele hacerse facilitando el número de *grados de libertad* que es tanto mayor cuanto mayor sea la fiabilidad de $u(x_i)$.

2. Clasificación de las contribuciones

2.1. Ejercicio:

En la calibración de un instrumento se han identificado todas las contribuciones siguientes. Señale las que son de tipo B:

☐ La realización de un número suficiente de medidas del patrón de calibración en un punto de la escala del instrumento para obtener la varianza muestral (repetibilidad).

☐ La utilización de la temperatura de una sala para efectuar una corrección en las medidas, admitiendo que la temperatura se distribuye uniformemente dentro del intervalo de temperatura en la que se encuentra controlada la sala, por ejemplo, (20 ± 1) °C.

☐ La utilización de la información del certificado de calibración de los patrones empleados para calibrar el instrumento, sabiendo que dicho certificado fue obtenido un año antes por la misma unidad que ahora calibra el instrumento.

☐ El empleo de un coeficiente de dilatación lineal cuyo valor se toma de un manual técnico solvente.

☐ La incertidumbre típica del coeficiente anterior estimada como una unidad de la última cifra significativa del valor de dicho coeficiente.

OK

Aunque la clasificación de las contribuciones de incertidumbre en tipo A o B no es esencial a efectos de cálculo pues todas ellas se van a combinar de la misma forma, sí es conveniente agruparlas en una u otra de estas categorías porque eso ayuda a clarificar la función modelo a construir. Sólo son contribuciones de tipo A las que se estiman estadísticamente a partir de medidas hechas durante la calibración. Si se utilizan medidas obtenidas en la misma sala pero con anterioridad a la calibración que ahora se considera, se trata de una contribución tipo B. Si se realiza una estimación estadística sobre una corrección de temperatura que no se mide, asumiendo una función de densidad de probabilidad determinada, la contribución es tipo B porque no se han realizado medidas de la temperatura.

3. Evaluaciones tipo A

Cuando se reiteran medidas de un mensurando, X, para realizar una evaluación tipo A de la dispersión de las mismas (*contribución de repetibilidad*), hay que tener en cuenta que se trabaja con una muestra de la población de todas sus medidas posibles (*muestra poblacional*) y que, en general, no se conoce su función de distribución ni los parámetros característicos de la misma. Si se imagina por un momento que la función de densidad de probabilidad de dicha variables fuese conocida, $f(X)$, se podrían obtener la media y la varianza de la misma mediante:

$$\left.\begin{aligned} < x > \equiv \mu &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx \\ V(x) \equiv \sigma^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\, dx \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

La media, μ, y la desviación típica, σ, se identificarían con el valor que mejor caracteriza al mensurando y con una medida de la dispersión de valores repetidos.

Sin embargo, la única información disponible es la muestra poblacional. En este caso, la Estadística proporciona métodos para *estimar* los parámetros μ, σ desconocidos. Aunque no hay una opción única, en la mayor parte de las áreas metrológicas se emplean los siguientes estimadores sobre la muestra poblacional de extensión n:

$$\left.\begin{aligned} \widehat{\mu} \equiv m \equiv \bar{x} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \\ \widehat{\sigma}^2 \equiv V \equiv s^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

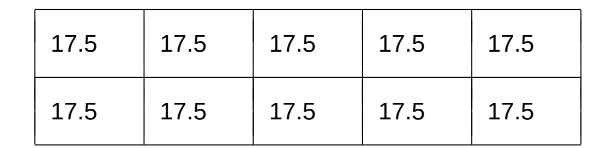
Ambos estimadores son variables aleatorias y, en particular, una muestra de medias aritméticas también apunta a la media poblacional, μ, pero su varianza estima la varianza poblacional dividida por la extensión de la muestra, n, es decir:

$$\left.\begin{aligned} x &= \overline{x} \\ u^2(x) &= \frac{s^2}{n} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

El número de grados de libertad asociados a s y $u(x)$ es $n-1$ porque se han utilizado en su determinación los n valores de la muestra y un valor dependiente de los mismos, $\overline{x}$, como se observa en la segunda expresión de (2)

3.1. Ejercicio:

Se mide diez veces una resistencia eléctrica de nominal 1 kΩ, obteniéndose los siguientes valores en ohmios:



17.5	17.5	17.5	17.5	17.5
17.5	17.5	17.5	17.5	17.5

Determine:

a) El estimador de la media de la población de medidas, en ohmios, con cuatro cifras significativas:

$\widehat{\mu}$ = Ω

OK

b) El estimador de la desviación típica de la población de medidas, en ohmios y con dos cifras significativas:

$\widehat{\sigma}$ = Ω

OK

c) ¿Qué valor debe asignarse a la resistencia, en ohmios y con cuatro sifras significativas?

x = Ω

OK

d) ¿Cuánto vale la incertidumbre típica de la contribución de repetibilidad asociada al resultado anterior, en ohmios y con dos cifras significativas?

$u(x)$ = Ω

OK

e) ¿Cuál es el número de grados de libertad de $u(x)$?

$\nu[u(x)]$ =

OK

Las expresiones (1) suelen conocerse como *media muestral o experimental* y *varianza muestral o experimental*, respectivamente. La raiz cuadrada de esta última es la *desviación típica muestral o experimental*. La expresión $s/\sqrt{n}$ se denomina *desviación típica muestral o experimental de la media*. Todos ellos son estimadores estadísticos de los parámteros de las correspondientes distribuciones.

4. Evaluaciones tipo B

Cuando se evalúan contribuciones de incertidumbre tipo B, la mayor dificultad estriba en formular una hipótesis adecuada. Por ejemplo, si se admite que una variable se encuentra entre un valor mínimo y otro máximo, el intervalo que ambos definen no puede ser ni muy exageradamente grande ni excesivamente pequeño y debe justificarse adecuadamente. Cuantificar la fiabilidad de este tipo de hipótesis no es sencillo. El apartado G.4 de la GUM[3] proporciona algunas pautas al respecto. No obstante, en la mayor parte de los casos, se admite que las evaluaciones tipo B se han realizado con experiencia y buen juicio por lo que resultan muy seguras. En estas condiciones es correcto asumir un número infinito de grados de libertad tal y como se indica en el punto G.4.3 de GUM[3] y en E2 del documento EA-4/02[5].

Una forma frecuente de realizar evaluaciones tipo B es suponer que la variable en cuestión posee una función de densidad de probabilidad sencilla pero adecuada a su descripción. En estos casos, las expresiones (1) permiten determinar los parámetros de la misma.

Por ejemplo, si la variable T responde a una distribución uniforme de probablidad entre un valor mínimo, $t_{\min}$, y otro máximo, $t_{\max}$, siendo nula la probabilidad para los valores fuera del intervalo $\triangle t = t_{\max} - t_{\min}$, la utilización de la definiciones (1) determinan:

$$\mu = \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} \frac{1}{\triangle t} t dt = t_{\min} + \frac{\triangle t}{2}$$

$$\sigma^2 = \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} \frac{1}{\triangle t} \left(t - \frac{\triangle t}{2} \right)^2 dt = \frac{(\triangle t)^2}{12}$$

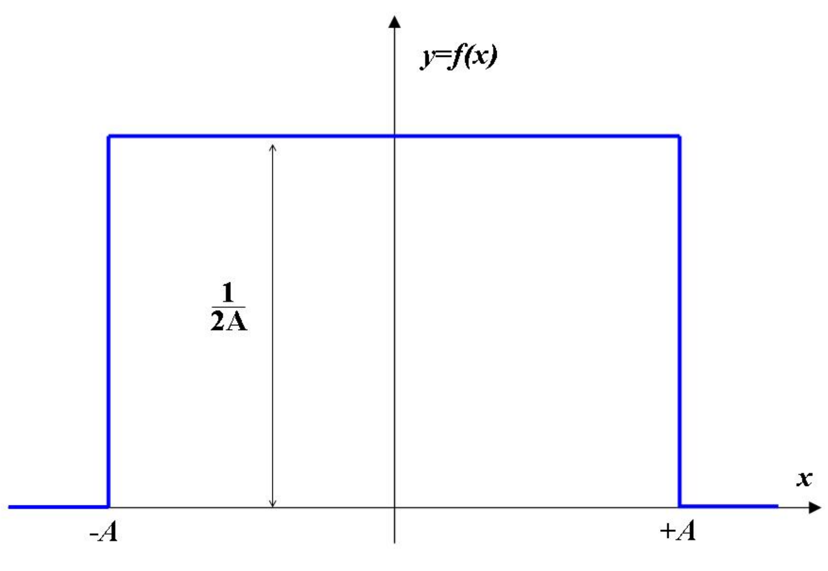


Figura 1

4.1. Ejercicio:

Para realizar una corrección térmica en el resultado de una medición se evalúa tipo B la temperatura de una sala que siempre se encuentra entre 17.5°C y 17.5°C. Se sabe, además, que el equipo de acondicionamiento determina una distribución sensiblemente uniforme de la temperatura en dicho intervalo.

Determine el valor, θ_o, y la desviación típica, $u(\theta)$, que cabe asignar a dicha temperatura, expresando los resultados con dos cifras significativas:

a) θ_o = ______ °C   b) $u(\theta)$ = ______ °C

OK   OK

4.2. Ejercicio:

Para corregir la discretización de las lecturas de un instrumento de división de escala E, se decide sumar a cualquier resultado una corrección de escala aditiva, centrada en la lectura del instrumento, en la hipótesis de que el valor del mensurando que se mide puede encontrarse en cualquier punto del intervalo definido por $[\text{lectura} \pm E/2]$.

Determine el valor de la corrección aditiva, c_E, y su desviación típica, u_E:

a) c_E = ______ $\cdot E$ b) u_E = ______ $\cdot E$

OK   OK

En algunos casos se utilizan distribuciones triangulares que priman más la presencia de la variable en el centro que en los extremos del intervalo (figura 2).

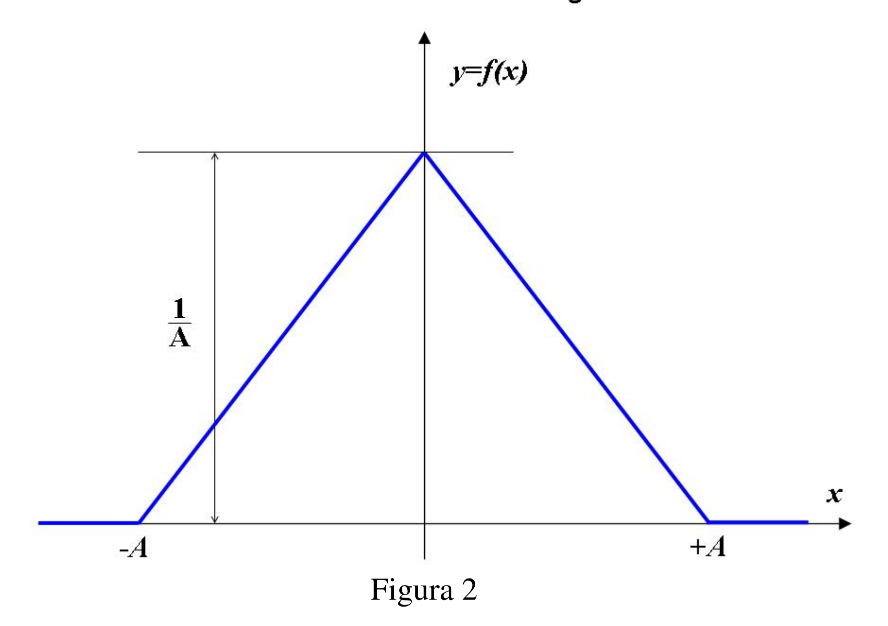


Figura 2

4.3.Ejercicio:

Para realizar una corrección térmica similar a la del ejercicio 4.1 se evalúa tipo B la temperatura de una sala que siempre se encuentra entre 17.5°C y 17.5°C. En este caso el equipo de acondicionamiento determina una mayor probabilidad de encontrar la temperatura hacia el centro del intervalo y por experiencias realizadas durante cierto tiempo se admite una función de densidad triangular como la de la figura 2.

Determine el valor, θ_o, y la desviación típica, $u(\theta)$, que cabe asignar a dicha temperatura, expresando los resultados con dos cifras significativas:

a) θ_o = ☐ °C

OK

b) $u(\theta)$ = ☐ °C

OK

También es posible encontrar funciones de densidad no uniforme definidas en un intervalo con la concavidad hacia las ordenadas positivas, es decir, en las que existe mayor probabilidad de que la variable se encuentre en los extremos que en el centro del intervalo. Un ejemplo de este tipo puede derivarse del oscilador armónico simple. Si en un ejercicio de tiro al blanco imaginamos un blanco puntual que se mueve en el eje de abscisas entre $x = -A$ y $x = +A$ con la ecuación horaria

$$x = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$$

la probabilidad de que el blanco se encuentre entre x y $x + dx$ puede deducirse mediante la variable tiempo a partir de la siguiente igualdad:

$$f(x)dx = \frac{2dt}{T}$$

ya que el blanco ocupará esa posición dos veces en cada periodo y la duración correspondiente es $2dt$ siendo T el periodo del movimiento y $\omega T = 2\pi$, todo ello de acuerdo con la dinámica del mismo. Teniendo en cuenta la ecuación horaria se escribe

$$f(x)dx = \frac{2dt}{T} = \frac{\omega}{\pi}dt = \frac{\omega}{\pi}\frac{1}{\omega\sqrt{A^2 - x^2}}dx$$

es decir:

$$f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}}$$

que se representa en la figura 1.

Las definiciones (1) permiten obtener:

$$\mu = \int_{-A}^{+A} \frac{1}{\pi}\frac{x}{\sqrt{A^2 - x^2}}dx = 0$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-A}^{+A} \frac{x^2}{\sqrt{A^2 - x^2}}dx = \frac{A^2}{2}$$

La segunda de las integrales es inmediata y se puede calcular, por ejemplo, mediante el cambio de variable $x = A\cos u$ que modifica el intervalo entre los límites $u = \pi$ y $u = 0$.

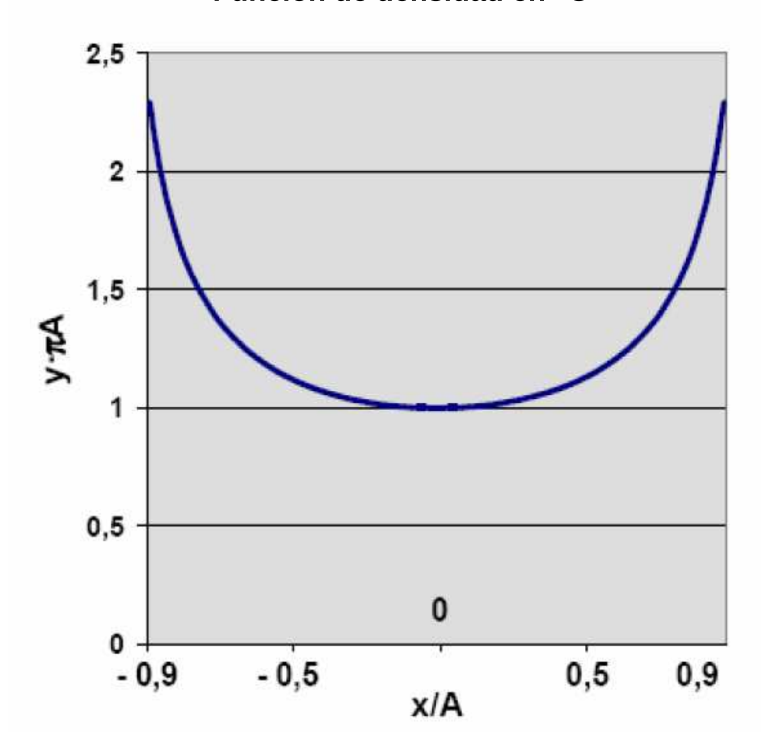


Figura 1

4.4. Ejercicio:

De nuevo se plantea evaluar tipo B la temperatura de una sala para realizar una corrección en las medidas de un mensurando, sabiendo que la temperatura de la sala siempre se encuentra entre 17.5°C y 17.5°C y que el equipo de acondicionamiento determina una variación cíclica de la temperatura sensiblemente senoidal en el tiempo.

Determine el valor, θ_o, y la desviación típica, $u(\theta)$, que cabe asignar a dicha temperatura, expresando los resultados con dos cifras significativas:

a) θ_o = ______ °C

OK

b) $u(\theta)$ = ______ °C

OK

También la componente de repetibilidad puede ser objeto de evaluación tipo B, En efecto, la evaluación tipo A (apartado 3 de esta unidad) exige la repetición de un número importante de medidas. En muchos casos se recomienda que la extensión de la muestra sea $n \geq 10$ y no es recomendable evaluar la contribución de repetibilidad mediante una desviación típica muestral con $n < 5$. Cuando se trata de un número importante de mensurandos como la medida de alguna magnitud en cada una de las piezas de una serie de fabricación con decenas de miles de unidades, por ejemplo, no es económicamente viable la repetición de medidas sobre una misma pieza.

Normalmente cada magnitud se mide una vez y no cabe de esta medida obtener información de repetibilidad. Sin embargo la dispersión de valores realmente se produciría si se midiese varias veces y su origen, como se indicó en la unidad 1, es fundamentalmente debido al instrumento y a la natural indefinición del mensurando. Una solución que se adopta en estos casos es hacer, de vez en cuando, una buena determinación de repetibilidad, s_r, apoyada en un número importante de medidas, n_r, por ejemplo diez o veinte, sobre varias piezas, por ejemplo entre cinco y diez, para disponer de un número importante de medidas que permitan calcular s_r con gran número de grados de libertad. Este método exige disponer de certezas suficientes sobre la estabilidad de la población estadística entre determinaciones de s_r, por ejemplo la existencia de un *sistema de control estadístico del proceso de fabricación* que mediante la determinación temporal de algunos parámetros del mismo permita actuar para que la serie se mantenga con una variabiliadad admisible. Si sobre una magnitud a medir con especial relevancia en cada pieza se realizasen tres medidas ($n = 3$) y se adoptase la media aritmética como valor de la misma, la contribución de repetibilidad se expresaría mediante $s_r/\sqrt{n}$. En el caso de medir una úica vez sobre cada pieza la contribución coincidiría con s_r.

Una situación parecida surge cuando se trata de evaluar la dispersión de medidas destructivas como, por ejemplo, la carga de rotura de una probeta en un ensayo de tracción o compresión. En estos casos es inevitable una evaluación tipo B en la que el análisis de series históricas de ensayos similares y de resultados de las verificaciones de la máquina de ensayo, junto con la experiencia de quien la realiza, son elementos esenciales

Otra fuente importante de medidas destructivas, o con muestras poblacionales muy reducidas, se presenta en los análisis químicos. En estos casos la experiencia personal y la de otros (*buenas prácticas de laboratorio*) son factores importantes para una buena evaluación tipo B.

4.5. Ejercicio:

Para determinar la contribución de repetibilidad en la medida del diámetro, d, de una pieza se efectúan medidas cada dos mil piezas realizando 17. medidas en cada una de 17. piezas. La desviación típica poblacional resulta s_r =17.5µm. Esta desviación típica incluye la dispersión de diámetros de cada pieza y la variabilidad entre piezas. Determine la desviación típica de repetibilidad para el diámetro a partir de n medidas simples, en la misma o en diferentes piezas, y el número de grados de libertad de aquella, en los dos casos siguientes:

Con $n = 1$

a) $u(\bar{d}) =$ ____ µm

OK

b) $\nu[u(\bar{d})] =$ ____

OK

Con $n = 3$

c) $u(\bar{d}) =$ ____ µm

OK

d) $\nu[u(\bar{d}]) =$ ____

OK

La cuantificación de la contribución de las derivas también puede evaluarse tipo B apoyándose en los registros históricos de calibración y medida. En las unidades 6 y 7 se presentan algunos casos.

5. Referencias

[1] *Reccomandation 1 (C1-1981)*: Procès Verbaux des Séances, CIPM, tome 49, Session 70, 1 981, pág. 26.

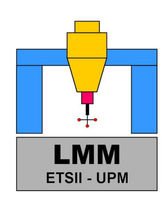
[2] *Reccomandation 1 y 2 (C1-1986)*: Procès Verbaux des Séances, CIPM, tome 54, Session 75, 1 986, págs. 35-36.

[3] ISO et al.: *Guide to the expression of Uncertainty in MeasurementM)*. ISO, 1 995, ISBN 92-67-10188-9. *Guía para la expresión de la incertidumbre de medida*. Traducción CEM, 2 000, NIPO 165-00-004-0.

[4] OIML: Guide OIML G 1-101 *Evaluation of measurement data - Supplement 1 to the "Guide to the expression of uncertainty in measurement" - Propagation of distributions using a Monte Carlo method*. Edition 2 007 (E), 60 pp.

[5] EA-4/02 (rev.00) *Expressions of the Uncertainty of Measurements in Calibration*. EA, 1 999.

Califica y Envia



Curso elaborado para el CEM por
A.M. Sánchez Pérez, J. de Vicente y Oliva, J.M. Díaz de la Cruz Cano y J. Carro de Vicente-Portela.

